Vendredi 9 novembre 2012

Examen partiel

Durée : deux heures.

Documents, calculettes et portables non autorisés. Les solutions doivent être rédigées de manière rigoureuse. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction. Le sujet comporte un recto et un verso.

Question de cours.

1. Énoncer le théorème de Heine.
2. Soit E un espace vectoriel normé et A une partie compacte de E. A est-elle fermée ? A est-elle bornée ?
3. Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. La sphère $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ est-elle ouverte ? Fermée ? Compacte ?
4. Soient E et F des espaces vectoriels normés et Φ une application linéaire continue. Rappeler ce qu'est la norme subordonnée de Φ.

Exercice 1. On considère le sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$A = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M,\ \mathrm{tr}(M) = 2,\ \det(M) = 0 \right\}.$$

1. Donner un exemple de norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que A est fermé.
3. Montrer que A est compact.
4. Soit $B = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M,\ \det(M) = 0 \right\}$. B est-il fermé ? B est-il compact ?

Exercice 2. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq (1 + \frac{1}{n})\sqrt{|x-y|}.$$

On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que f vérifie

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x-y|}.$$

2. En déduire que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. On note $E = \mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soit $P = a_0 + a_1 X \cdots + a_n X^n \in E$. Justifier que la série de terme général $\frac{|P^{(n)}(0)|}{n!}$ converge. Pour $P \in E$, on pose
$$\|P\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|P^{(n)}(0)|}{n!}.$$
2. Pour $P = a_0 + a_1 X \cdots + a_n X^n \in E$, calculer $\|P\|$ en fonction des coefficients $a_0, \dots, a_n$.
3. Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'application
$$\Phi_n : (E, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad P \mapsto P^{(n)}(0)$$
est linéaire et continue. Calculer sa norme.
5. Montrer que l'application
$$\Phi : (E, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|), \quad P \mapsto P'$$
est linéaire et n'est pas continue.
6. Soient P et Q des éléments de E. Soient les sous-ensembles A et B de E définis par
$$A = \left\{ R \in E \mid \forall n \in \mathbb{N},\ R^{(n)}(0) \leq P^{(n)}(0) \right\},$$
$$B = \left\{ R \in E \mid \forall n \in \mathbb{N},\ R^{(n)}(0) \geq Q^{(n)}(0) \right\}.$$
a) Montrer que $A \cap B$ est fermé dans $(E, \|\cdot\|)$.
b) Montrer que $A \cap B$ est borné dans $(E, \|\cdot\|)$.
c) Montrer que $A \cap B$ est compact dans $(E, \|\cdot\|)$.
Indication : on pourra montrer que $A \cap B$ est inclus dans un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.